Appunti di Teoria dei Sistemi
Capitolo 1 - Introduzione ai sistemi

Concetti generali sui "sistemi"

INTRODUZIONE: DEFINIZIONE DI SISTEMA

(appunti) Supponiamo di dover studiare un certo "fenomeno", che può essere fisico o artificiale; "studiare" questo fenomeno significa essenzialmente fare 3 cose:

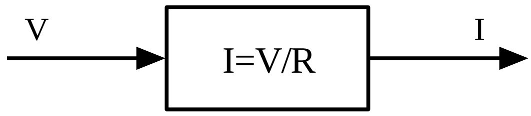
- individuare la causa o le cause del fenomeno;
- individuare l'effetto o gli effetti che caratterizzano tale fenomeno;
- individuare il legame tra le cause e gli effetti.

Per capirci, facciamo subito un esempio. Supponiamo di avere un corpo conduttore, di una certa lunghezza, ai capi del quale viene applicata una tensione V: a seguito di questa tensione, noi misuriamo una corrente I all'interno del conduttore. Possiamo allora subito dire che la tensione applicata è la "**causa**", mentre la corrente misurata nel conduttore è l' "**effetto**".

Schematicamente, possiamo dunque rappresentare il fenomeno nel modo seguente:

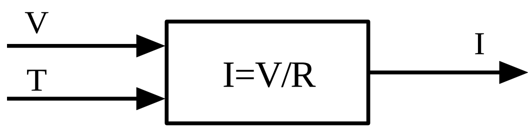
*Il passaggio in cui noi individuiamo le cause e gli effetti relativi al fenomeno in esame prende il nome di "**orientazione**"* nel senso che noi "orientiamo" appunto il nostro studio verso queste cause e questi effetti. Lo schema appena tracciato mette in evidenza cause ed effetti, mentre quella specie di "scatola", per il momento ancora vuota, rappresenta il legame, evidentemente matematico, tra di essi.

Una volta effettuata l'orientazione del problema, dobbiamo dunque trovare il legame causa-effetto: nel nostro esempio la cosa è immediata in quanto questo legame è semplicemente dato dalla legge di Ohm V=RI, per cui possiamo completare il nostro schema nel modo seguente:



Una prima osservazione importante è la seguente: *dato uno stesso fenomeno, le cause ad esso relative possono essere più di una come anche gli effetti.*

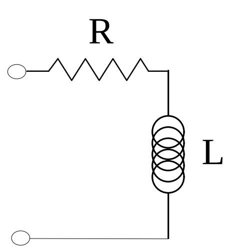
Ad esempio, nel caso del conduttore che stiamo considerando, una seconda causa può essere la temperatura, la quale, come sappiamo, influenza il valore della resistenza R del conduttore stesso. Possiamo perciò schematizzare la situazione anche nel modo seguente:



Quasi sempre, capita di avere un numero di cause maggiore di 1: ovviamente, a seconda dei fini del nostro studio e della precisione che vogliamo raggiungere, noi possiamo trascurare alcune cause ritenute secondarie, concentrandoci invece su altre cause ritenute più importanti. In generale, *quante più cause consideriamo, tanto più complesso è il modello matematico da impiegare e quindi tanto più precisa sarà la nostra analisi.*

Questo anche per dire che, dato uno stesso fenomeno, noi possiamo esaminarlo con modelli matematici diversi, in funzione appunto del grado di dettaglio desiderato.

Per rifarci sempre al caso del conduttore, possiamo ad esempio considerare anche gli effetti induttivi che si manifestano nel conduttore (dovuti al campo magnetico che si autoconcatena con la corrente); includendo tali effetti nella nostra analisi, noi modelliamo il conduttore non più solo con una resistenza, ma anche con una induttanza:



Così facendo, il modello matematico che usiamo per legare la causa all'effetto subisce una complicazione, visto che diventa adesso di tipo "differenziale" e non più "algebrico" come prima: si tratta infatti dell'equazione

$$v = Ri + L\frac{di}{dt}$$

che, risolta, fornisce il legame ricercato: $i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{v(t)}{R}$

Come detto prima, quindi, noi stiamo considerando lo stesso fenomeno di prima, ma con un modello matematico diverso. Potremmo perfezionare ulteriormente questo modello considerando anche gli effetti capacitivi che si manifestano, col risultato di ottenere una nuova equazione differenziale, questa volta di grado 2.

Premesso questo, possiamo dunque fornire la seguente definizione di "sistema":

Def. *Un "**sistema**" è un modello matematico di un fenomeno fisico o artificiale: esso comprende le cause e gli effetti relativi al fenomeno, nonché la relazione matematica che li lega*

Questa è dunque la definizione di sistema: nel seguito, i termini "sistema" e "modello matematico" staranno ad indicare la stessa cosa. Per indicare le cause parleremo invece, d'ora in poi, di "**ingressi**", mentre gli effetti saranno d'ora in poi le "**uscite**" (o anche le "*risposte*").

SISTEMI STATICI E SISTEMI DINAMICI

(appunti) Consideriamo sempre il caso del conduttore ai capi del quale è applicata una tensione. Abbiamo detto che il modello più semplice per analizzare il fenomeno della corrente che scorre nel conduttore a seguito dell'applicazione della tensione è la legge di Ohm

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Questo legame tra l'ingresso (tensione) e l'uscita (corrente) gode di una proprietà fondamentale: si tratta infatti di un legame "istantaneo" (o anche "*statico*"), nel senso che *il valore che l'uscita assume in ciascun istante dipende SOLO dal valore dell'ingresso in quello stesso istante.*

Un sistema che goda di questa proprietà si definisce "**statico**".

Diverso è invece il caso in cui il legame tra ingresso ed uscita è di tipo differenziale, ad esempio

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Per determinare l'andamento dell'uscita è qui necessaria una operazione di integrazione e, come sappiamo, questa operazione richiede necessariamente 2 informazioni:

- una condizione iniziale, ossia il valore dell'uscita in un istante prefissato τ;

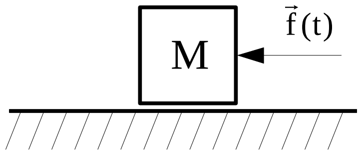
- l' insieme dei valori che l'ingresso assume nell'intervallo che va dall'istante τ all'istante di osservazione t;

La differenza con il caso precedente sta dunque nel fatto che il sistema ha "*memoria*", ossia nel fatto che l'uscita, in un determinato istante t, dipende sia dal valore dell'ingresso nell'istante t sia anche da quanto è successo al sistema prima di tale istante. Per questo motivo, i sistemi con memoria si dicono "**dinamici**".

La "*Teoria dei Sistemi*" si occupa essenzialmente dei sistemi dinamici, che sono evidentemente quelli più complessi.

ESEMPIO

Analizziamo adesso un altro fenomeno: supponiamo di avere una massa M che si trova su di un piano e che è sottoposta ad una forza $\vec{f}(t)$, parallela al piano; supponiamo anche che la massa, nel proprio moto, sia sottoposta ad una forza di attrito $B\vec{v}$ proporzionale alla velocità $\vec{v}$ secondo il coefficiente B. Ci interessa conoscere la velocità della massa.



Il primo passo della nostra analisi consiste nell'orientazione del nostro studio ed è una cosa che in fondo abbiamo già fatto: l'ingresso è costituito dalla forza $\vec{f}(t)$, mentre l'uscita è costituita dalla velocità.

La schematizzazione del sistema è dunque la seguente:

Resta da determinare il legame matematico tra ingresso ed uscita: questo legame si ricava evidentemente risolvendo l'equazione differenziale

$$f(t) = Bv(t) + M\frac{di(t)}{dt}$$

La cosa importante da osservare a questo punto è la seguente: a parità di valori numerici, questa equazione differenziale è formalmente identica a quella vista nell'esempio del conduttore percorso da corrente, ossia

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Questo significa che il legame tra l'ingresso e l'uscita sarà formalmente identico a quello ricavato prima, con la sola differenza dei valori numerici interessati. Ecco, dunque, perché, nel nostro studio, noi non ci concentreremo sui singoli casi di sistemi, ma analizzeremo le proprietà di singole "classi" di sistemi, dove ciascuna "classe" racchiude sistemi che, come in questo caso, sono descritti dallo stesso tipo di legame matematico.

Possiamo esprimerci dicendo che *il nostro studio sarà rivolto alle proprietà dei diversi modelli matematici.*

In particolare, gli aspetti oggetto della nostra analisi saranno molteplici:

- in primo luogo, ci occuperemo di determinare l'andamento temporale dell'uscita o delle uscite a partire dalla conoscenza dell'ingresso o degli ingressi, come abbiamo fatto negli esempi appena visti;

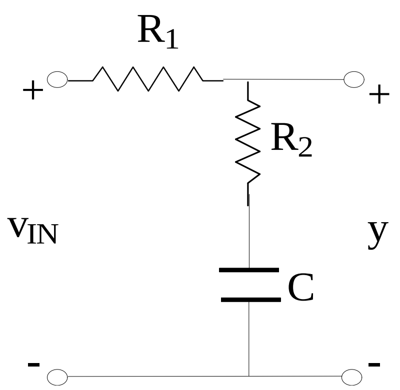
- in secondo luogo, ci occuperemo di determinare l'ingresso o gli ingressi in modo tale da ottenere una uscita con delle prefissate caratteristiche;

- ci occuperemo anche del problema della "*stabilità*" dei sistemi, ossia di analizzare la sensibilità dei sistemi a effetti indesiderati (i cosiddetti "*disturbi*") non considerati a priori: vedremo perciò quanto questi effetti possano incidere sulla risposta del sistema e se e come è possibile fare in modo da rimediare all'azione di tali effetti.

Vedremo adesso una serie di importanti esempi di sistemi dinamici che ci consentano di individuare tutte le possibili situazioni cui ci possiamo trovare davanti nei nostri studi futuri.

ESEMPIO 1: CIRCUITO RC

Il primo esempio è costituito da un conduttore che noi modelliamo mediante il seguente circuito:



Come ingresso al sistema consideriamo la tensione di alimentazione $v_{IN}(t)$; come uscita del sistema consideriamo invece la tensione y(t) (a vuoto) ai capi della serie tra R_2 e C. Vogliamo il legame tra l'ingresso e l'uscita.

Gli strumenti a nostra disposizione, in questo caso, sono le leggi di Kirchoff e le relazioni di lato di resistore e condensatore.

Applicando la LKT e la relazione di lato del condensatore, noi ricaviamo una prima relazione utile, che è

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_C(t) = \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_{IN}(t)$$

Questa è una equazione differenziale che, risolta, ci dà l'andamento della tensione ai capi del condensatore. Tuttavia, essa non contiene la variabile di uscita y(t) che noi abbiamo scelto, per cui è opportuno determinare una seconda relazione che leghi y(t) a $v_C(t)$: poiché

$$\begin{cases} y(t) = R_2 i(t) + v_C(t) \\ i(t) = \dfrac{v_{IN}(t) - y(t)}{R_1} \end{cases}$$

la relazione che ci interessa è

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{IN}(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_C(t)$$

La prima osservazione che facciamo è che l'espressione trovata per y(t) sembra indicare che il sistema è statico: infatti, la y(t) è espressa come legame di tipo algebrico tra la tensione di ingresso $v_{IN}(t)$ e la tensione sul condensatore $v_C(t)$. In realtà, noi sappiamo bene che non è così, in quanto proprio la $v_C(t)$ si ottiene mediante una operazione di integrazione dell'equazione trovata prima: fissato un arbitrario istante iniziale τ, possiamo infatti scrivere che

$$v_C(t) = e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-t)} v_C(t) + \int_t^t e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-x)} \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_{IN}(x)dx$$

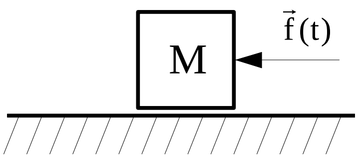
Questa relazione ci mostra che il sistema è dotato di memoria, ossia è un sistema dinamico: infatti, per conoscere v_C all'istante t (e quindi anche y all'istante t) noi dobbiamo conoscere sia v_C all'istante τ (cioè la condizione iniziale) sia anche l'andamento dell'ingresso $v_{IN}(t)$ nell'intervallo $[\tau,t]$.

La storia passata del sistema è dunque rappresentata dalla variabile $v_C(t)$, che per questo motivo prende il nome di "**variabile di stato**": essa infatti rende conto dello "**stato**" del sistema in un prefissato istante iniziale τ.

La caratteristica del sistema considerato è dunque quella per cui *la variabile di uscita è diversa dalla variabile di stato,* nel senso che le informazioni circa la storia passata del sistema vengono da una variabile diversa da quella scelta come uscita.

ESEMPIO 2: SISTEMA MECCANICO

Consideriamo nuovamente il problema della massa in movimento sottoposta ad una forza $\vec{f}(t)$ parallela al piano e soggetta anche ad una forza di attrito proporzionale alla velocità $\vec{v}$ secondo il coefficiente B:



Abbiamo già visto prima che, per conoscere la velocità della massa in ciascun istante, dobbiamo risolvere l'equazione differenziale

$$f(t) = Bv(t) + M\frac{di(t)}{dt}$$

Effettuando allora l'integrazione di questa equazione, abbiamo che

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}}(\mathrm{t}-\tau)}\mathrm{v}(\tau) + \int_{\tau}^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}}(\mathrm{t}-x)} \frac{1}{\mathrm{M}} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$$

Qui notiamo subito una differenza sostanziale con il caso precedente: se da un lato la soluzione è formalmente analoga, dall'altro ***la variabile di uscita v(t) coincide con la variabile di stato.***

Infatti, è proprio la velocità della massa all'istante iniziale τ a costituire la condizione iniziale, ossia è proprio la velocità v(t) a fornire le informazioni circa la storia passata del sistema.

Supponiamo adesso di <u>cambiare l'orientazione del problema</u>: mentre continuiamo a considerare $\vec{\mathrm{f}}(\mathrm{t})$ come ingresso, come uscita prendiamo la posizione z(t), misurata ovviamente rispetto ad un fissato sistema di riferimento.

Per determinare z(t) possiamo sfruttare il fatto che essa è legata alla velocità v(t) dalla relazione

$$\frac{\mathrm{dz}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = \mathrm{v}(\mathrm{t})$$

Integrando questa equazione, noi otteniamo che

$$\mathrm{z}(\mathrm{t}) = \mathrm{z}(\tau) + \int_{\tau}^{\mathrm{t}} \mathrm{v}(q)\mathrm{d}q$$

Sostituendo l'espressione della velocità ricavata prima, abbiamo che

$$\mathrm{z}(\mathrm{t}) = \mathrm{z}(\tau) + \mathrm{v}(\tau)\int_{\tau}^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}}(q-\tau)}\mathrm{d}q + \frac{1}{\mathrm{M}}\int_{\tau}^{\mathrm{t}}\int_{\tau}^{q} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}}(q-x)} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}q\mathrm{d}x$$

Questa relazione mostra una situazione ancora diversa rispetto ai casi precedenti: infatti, considerando l'espressione di v(t) prima ricavata, è evidente che le informazioni circa la storia passata del sistema vengono adesso da due variabili diverse, che sono la stessa variabile di uscita z(t) e la variabile v(t).

ESEMPIO 3: COSTO ANNUALE DELLA MANODOPERA

Come penultimo esempio consideriamo un fenomeno artificiale quale il costo annuale della manodopera in uno stabilimento.

Procediamo intanto alla orientazione del problema: è ovvio che il suddetto costo annuale, che costituisce l'uscita, dipende strettamente dal numero di dipendenti dello stabilimento; questo numero di dipendenti varia, anno per anno, a seguito delle assunzioni (che producono un incremento) e dei licenziamenti (che producono un decremento). Consideriamo allora come ingresso del sistema il numero delle assunzioni: prenderemo questo numero positivo o negativo a seconda che le assunzioni siano maggiori o minori dei licenziamenti.

Possiamo dunque ragionare come segue: se indichiamo con x(t) il n° di dipendenti dello stabilimento nell'anno t, il numero di dipendenti nell'anno t+1 sarà

$$x(t+1) = x(t) - bx(t) + u(t)$$

dove βx(t) è il numero di dipendenti che, per un qualsiasi motivo, hanno abbandonato il lavoro (il coefficiente β è la percentuale di abbandoni).

Ponendo α=1-β, quella relazione si può scrivere nella forma più compatta

$$x(t+1) = ax(t) + u(t)$$

Se ora indichiamo con y(t) il costo complessivo della manodopera nell’anno t (si tratta cioè dell’uscita) e indichiamo inoltre con C(t) il costo medio di un dipendente nell’anno t, possiamo anche scrivere che $y(t) = C(t)x(t)$.

Queste due relazioni ricavate ci dicono che, per conoscere y(t), noi abbiamo bisogno delle seguenti informazioni:

$$x(\tau), u(\tau), u(\tau+1), \ldots, u(t-1)$$

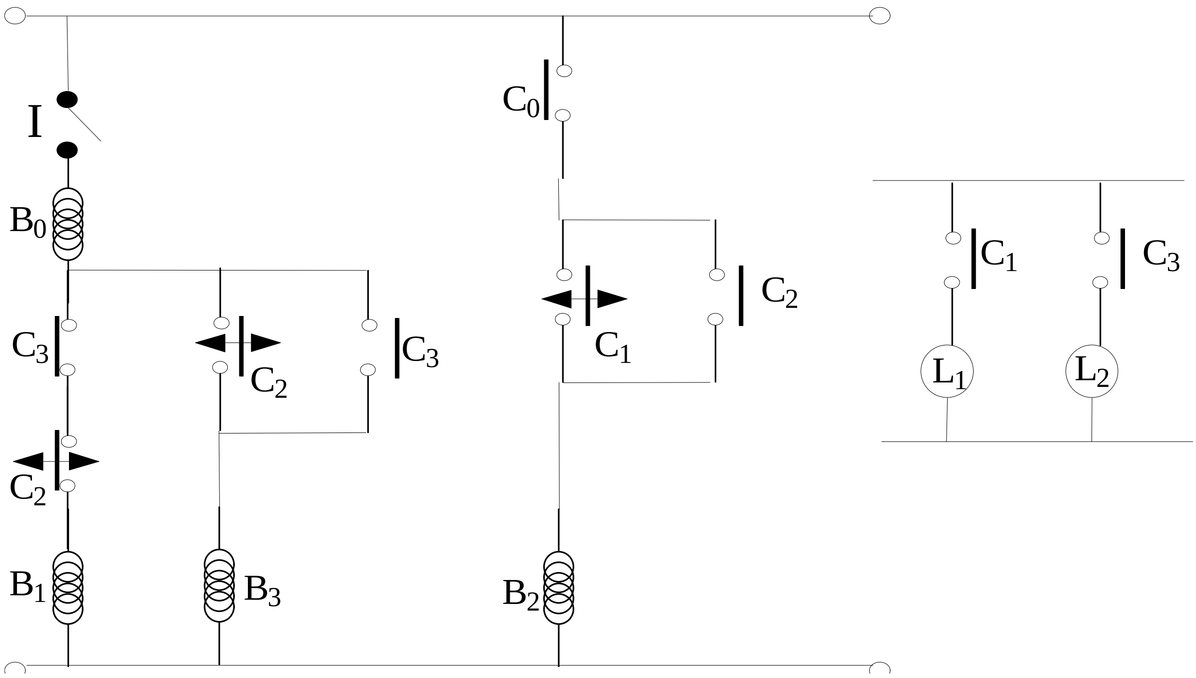
Infatti, noti x(τ) e u(τ),possiamo calcolare x(τ+1); noti x(τ+1) e u(τ+1), possiamo calcolare x(τ+2) fino a che, noti x(t-1) e u(t-1), possiamo calcolarci x(t) e quindi l’uscita y(t).

La variabile di stato è dunque x(t), visto che ci serve il suo valore iniziale all’istante τ; oltre ad essa, ci serve anche conoscere i valori della variabile u(t), che costituisce l’ingresso, da τ fino a t-1. Solo l’insieme di queste informazioni ci consente di determinare l’uscita.

In definitiva, quindi, questo esempio è molto simile a quello del caso della massa in cui ci interessava la velocità come risposta del sistema. C’è però anche una differenza fondamentale: mentre in quel caso la grandezza “tempo” era continua, in questo caso essa è “discreta”, visto che noi siamo interessati a y(t) nell’anno 0, nell’anno 1, nell’anno 2 e così via. In altre parole, mentre in quel caso il tempo assumeva valori reali, qui esso assume solo valori discreti.

ESEMPIO 4: CIRCUITO A RELÈ

L’ultimo esempio che prendiamo in considerazione ha come oggetto il “circuito a relè” illustrato nella figura seguente:



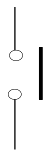
Vediamo intanto di chiarire il significato dei simboli circuitali che compaiono in questa figura:

- intanto, c'è un interruttore I che pilota l'intero circuito: quando esso è aperto, non lascia passare corrente, mentre, quando è chiuso, lascia passare corrente (il cui valore non ci interessa);

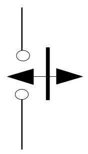
- B_0, B_1, B_2 e B_3 sono tre "bobine";

- ogni bobina, quando è percorsa da corrente, provoca lo spostamento degli interruttori che ad essa corrispondono: tali interruttori sono contrassegnati con la lettere "C" e ciascuno con un pedice che indica la bobina pilota; per esempio, C_3 è un contatto pilotato dalla bobina B_3: ogni volta che tale bobina cambia il proprio stato (ossia viene attraversata da corrente quando inizialmente non lo era oppure viceversa), il contatto commuta dallo stato attuale all'altro (le uniche possibilità sono infatti quella di contatto aperto e di contatto chiuso);

- tra i contatti pilotati dalle bobine, ce ne sono di due tipi: quelli indicati con il simbolo

  sono "contatti istantanei", che cioè si chiudono o si aprono istantaneamente, senza alcun tempo di ritardo (si tratta, cioè, di interruttori ideali); quelli indicati invece con

  sono "contatti ritardati", che cioè impiegano un tempo non nullo per commutare da uno stato all'altro;

- infine, nella porzione di circuito fisicamente staccata dalla "porzione principale", ci sono due lampadine contrassegnate da L_1 ed L_2.

Fatta questa necessaria premessa, il fenomeno che noi vogliamo studiare consiste nel funzionamento di questo circuito.

Come ingresso u, noi consideriamo la "posizione" dell'interruttore: considerato che tale interruttore può essere o APERTO o CHIUSO, la funzione di ingresso sarà

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{I aperto} \\ u_1 & \text{I chiuso} \end{cases}$$

Come uscita, invece, consideriamo l' "accessione delle due lampadine"; ciò significa che la funzione di uscita potrà avere solo i seguenti valori:

$$y = \begin{cases} y_1 & L_1 \text{ accesa e } L_2 \text{ spenta} \\ y_2 & L_1 \text{ spenta e } L_2 \text{ accesa} \\ y_3 & L_1 \text{ spenta e } L_2 \text{ spenta} \\ y_4 & L_1 \text{ accesa e } L_2 \text{ accesa} \end{cases}$$

L’accessione delle lampadine dipende dall’apertura dei contatti C_1 e C_3: quando in contatti sono entrambi chiusi, le lampadine sono entrambe accese; quando i contatti sono entrambi aperti, le lampadine sono entrambe spente; quando un contatto è chiuso e l’altro è aperto, una lampadina è accesa e l’altra è spenta.

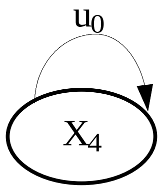
Lo stato dei contatti C_1 e C_3 dipende a sua volta dalle bobine B_1 e B_3 che li pilotano, ma anche da B_0 e B_1 che sono in qualche modo ad esso legate: di conseguenza, per trovare il legame tra ingresso e uscita noi dobbiamo analizzare tutte le possibilità che si possono presentare.

La situazione iniziale da cui partiamo è quella raffigurata prima:

- l’interruttore è aperto, per cui la bobina B_0 non è energizzata, ossia non è percorsa da corrente, e lo stesso dicasi quindi per le bobine B_1 e B_3;
- il contatto (istantaneo) C_0 è chiuso;
- i contatti C_1 (uno istantaneo e uno ritardato) sono entrambi aperti;
- dei contatti C_2, ce n’è uno (ritardato) chiuso, mentre gli altri due sono aperti;
- i contatti C_3 (entrambi istantanei) sono aperti;
- la bobina B_2, essendo il proprio ramo in circuito aperto come tutti gli altri rami, è anch’essa disenergizzata.

Con riferimento alle bobine, dunque, la situazione di partenza, o meglio lo “stato” di partenza, è caratterizzato da tutte le bobine disenergizzate; per quanto riguarda, invece, le lampadine, esse sono entrambe spente. Indichiamo allora questo “stato iniziale” del circuito con X_4.

A partire da questo stato, se noi lasciamo invariata la posizione dell’interruttore, il che significa che stiamo applicando al sistema un ingresso di valore u_0 (che non è un valore numerico, bensì un valore logico, in quanto indica appunto l’interruttore aperto), è abbastanza ovvio intuire come la situazione non risulti affatto modificata: le 4 bobine erano tutte disenergizzate e rimangono tali: facendo uso di un grafo, possiamo allora rappresentare questa prima possibile evoluzione del sistema nel modo seguente:



Questa notazione indica appunto che, partendo dallo stato iniziale X_4, se noi applichiamo al sistema l’ingresso u_0, il sistema torna nello stato X_4 o, ciò che è lo stesso, rimane nello stato X_4.

Vediamo invece cosa accade chiudendo l’interruttore, ossia applicando al sistema l’ingresso u_1.

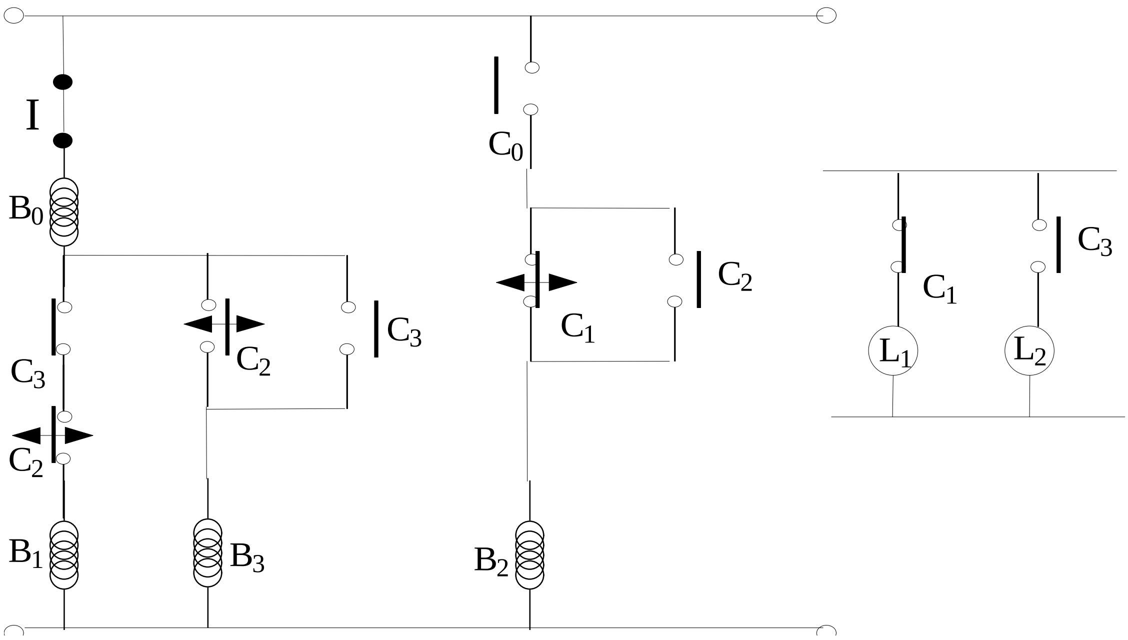
La chiusura dell’interruttore comporta l’energizzazione della bobina B_0 e questo, a sua volta, provoca l’apertura del contatto C_0. Almeno per il momento, questa apertura non cambia la situazione di B_2 che era e resta disenergizzata in quanto il ramo continua ad esse in condizioni di circuito aperto.

Oltre alla bobina B_0, viene energizzata anche la bobina B_1, visto che i contatti sul suo ramo interruttore sono entrambi inizialmente chiusi; l’energizzazione di B_1 provoca la chiusura dei contatti C_1; tuttavia, di questi due contatti, uno è istantaneo (quello in serie a L_1), mentre l’altro è ritardato: di conseguenza, noi ci preoccupiamo prima di quello istantaneo, lasciando alla fine quello ritardato. Il contatto C_1 istantaneo è quello della lampadina L_1 e si chiude: ciò significa che L_1 si accende.

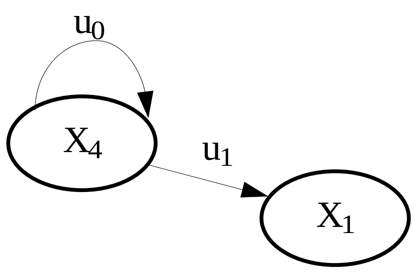
Ancora, mentre B_1 e B_0 si sono energizzate, B_3 e B_2 rimangono invece disenergizzate: infatti, per B_3 i contatti C_2 e C_3 rimangono aperti, mentre, per quanto riguarda B_2, abbiamo prima detto che C_0 si è aperto. Se B_3 rimane disenergizzata, i contatti C_3 rimangono invariati e, in particolare, quello che è in serie a L_2 fa si che questa lampadina rimanga spenta.

Infine, dato che non sono rimasti contatti istantanei da esaminare, possiamo ora considerare la commutazione del contatto C_1 ritardato, il quale adesso si chiude: tuttavia, questa chiusura non modifica la situazione, in quanto il ramo in cui si trova rimane comunque in condizioni di circuito aperto (dato che è aperto C_0).

In definitiva, quindi, partendo dallo stato iniziale X_4 e applicando il valore u_0 dell'ingresso, siamo passati ad una situazione, che indichiamo con X_1, in cui le bobine B_0 e B_1 sono energizzate, mentre le bobine B_2 e B_3 sono ancora disenergizzate:

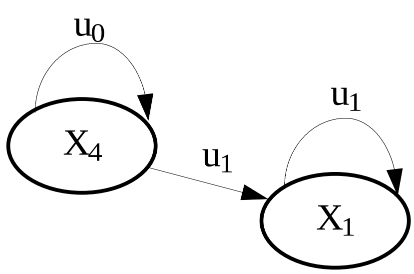


Andando nel grafo che abbiamo cominciato a delineare prima, possiamo rappresentare questa evoluzione del sistema nel modo seguente:



In questa rappresentazione stiamo per il momento indicando solo lo stato delle bobine, mentre invece non ci preoccupiamo ancora più di tanto delle lampadine, lasciando per dopo le opportune considerazioni.

A questo punto, partendo dallo stato X_1, vediamo che cosa accade applicando l'ingresso u_1 e l'ingresso u_0. E' subito evidente che, applicando u_1, ossia lasciando chiuso l'interruttore, la situazione non cambia, ossia il sistema permane nello stato di partenza:



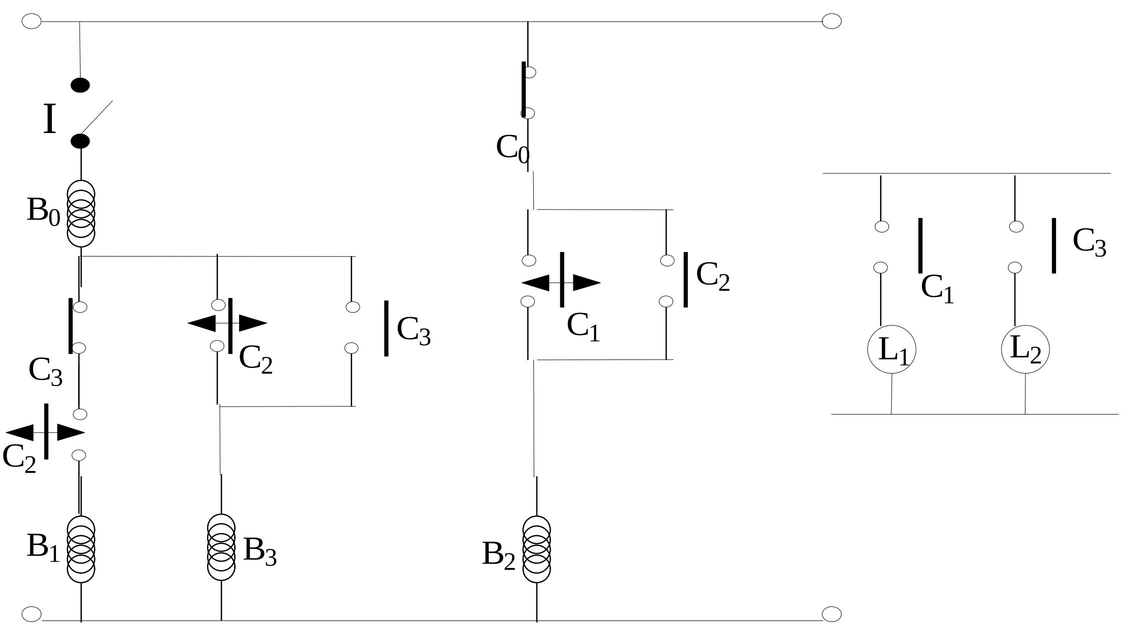
Viceversa, le cose cambiano applicando l'ingresso u_0, ossia aprendo nuovamente l'interruttore.

Intanto, l'apertura dell'interruttore provoca la disenergizzazione di B_0, il che comporta che il contatto istantaneo C_0 si chiude nuovamente. Questa chiusura ha una immediata conseguenza su B_2, in quanto, dei due contatti presenti sul suo ramo, C_1 è chiuso: quindi la bobina B_2 si energizza. Questo comporta la commutazione dei contatti C_2, prima quello istantaneo e successivamente quelli ritardati. L'apertura del C_2 istantaneo non provoca però alcuna conseguenza, visto che il contatto C_1 è ancora chiuso.

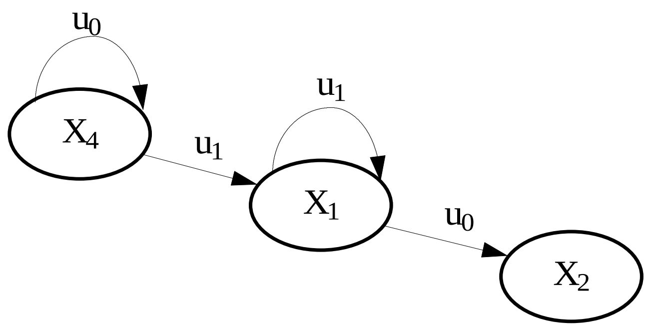
Nel frattempo, avendo aperto l'interruttore, c'è la disenergizzazione di B_1 e quindi la commutazione dei contatti C_1: il primo a commutare è il C_1 istantaneo in serie a L_1, per cui questa lampadina si spegne.

Avendo ora esaurito i contatti istantanei, dobbiamo considerare quelli ritardati: il primo a commutare è il C1 ritardato, il quale si apre senza però provocare alcuna conseguenza; successivamente, commutano i contatti C_2 ritardati, ma anche questa commutazione non ha conseguenze.

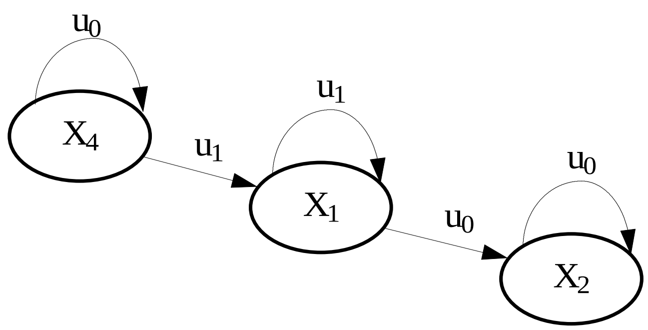
La situazione cui perveniamo è dunque quella per cui le bobine B0, B1 e B3 sono disenergizzate, mentre B2 è energizzata:



Indicando questo stato del sistema con X_2, il grafo procede nel modo seguente:



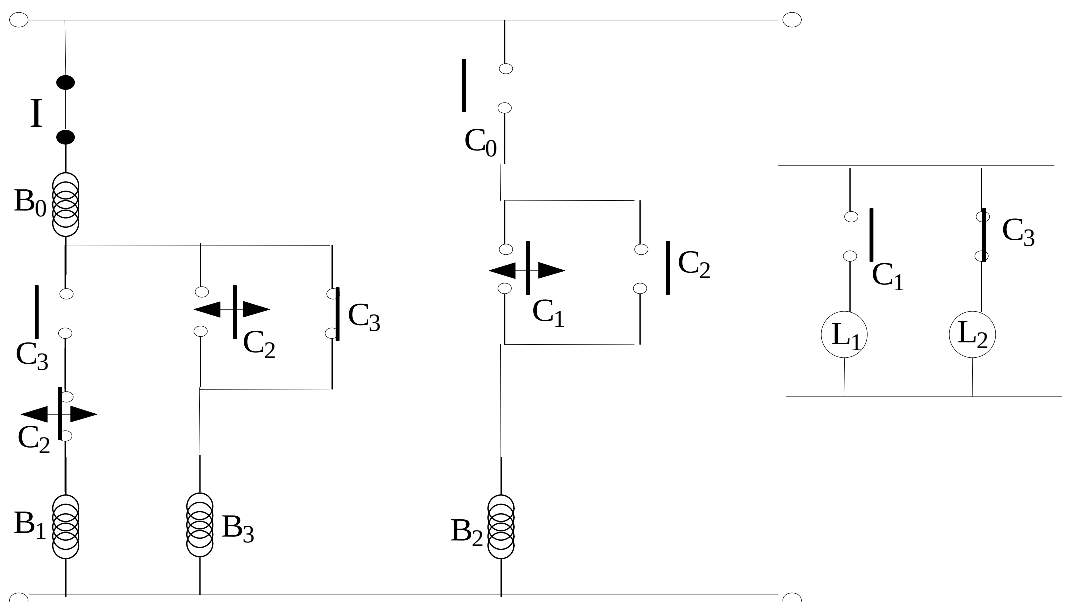
E’ evidente che, partendo dallo stato X2, l’applicazione dell’ingresso u0 non modifica in alcun modo la situazione:



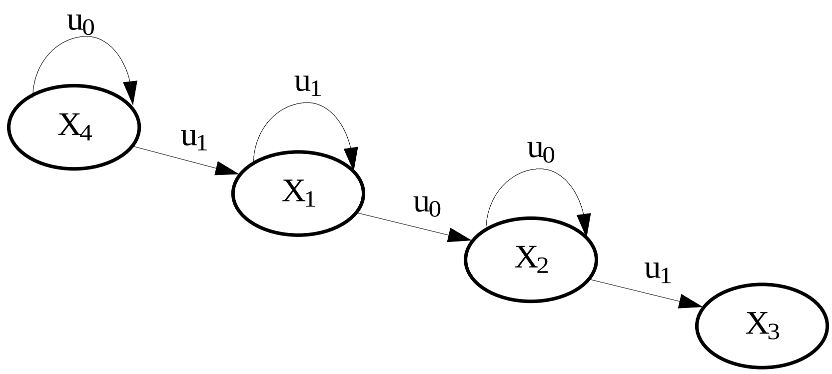
Al contrario, le cose cambiano applicando l’ingresso u1, ossia chiudendo ancora una volta l’interruttore.

La chiusura dell’interruttore ha come primo effetto l’energizzazione di B_0 e quindi l’apertura di C_0: questa apertura provoca la disenergizzazione di B_2 e quindi la commutazione del contatto C_2 istantaneo; tuttavia, questa apertura non modifica in alcun modo la situazione. La chiusura dell’interruttore comporta anche l’energizzazione di B_3 e quindi la commutazione dei contatti C_3, tutti istantanei: la commutazione di questi contatti non ha effetti sulle bobine, mentre porta all’accensione di L_2. Successivamente commutano i C_2 ritardati: tuttavia, questa commutazione non comporta alcuna variazione, per cui l’evoluzione è adesso completa.

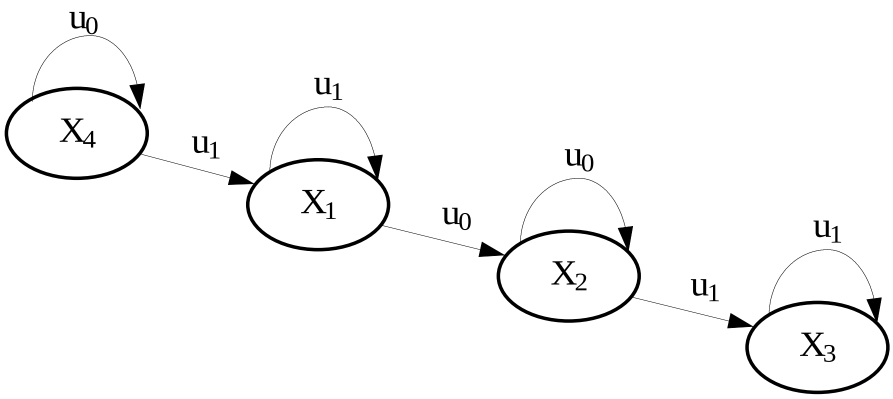
La situazione è dunque quella di B_1 e B_2 disenergizzate e di B_0 e B_3 energizzate:



Indicando con X_3 questa situazione, possiamo ancora perfezionare il nostro grafo:



A questo punto, come in tutti gli altri casi, è ovvio che la situazione rimane invariata applicando u_1 come ingresso, in quanto l'interruttore era chiuso e rimane chiuso:

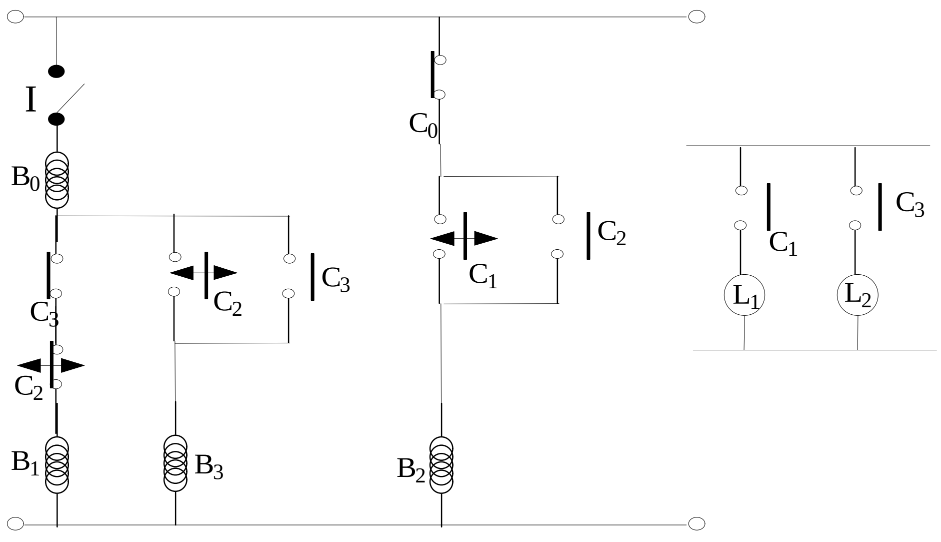


Vediamo invece cosa accade applicando l'ingresso u_0, ossia aprendo l'interruttore.

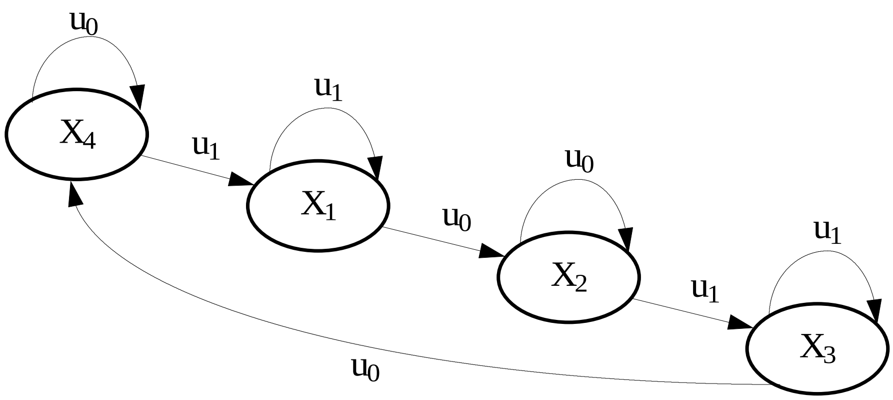
Il primo effetto è la disenergizzazione di B_0 e quindi la commutazione di C_0, il quale si chiude: dato, però, che gli altri contatti sul ramo di C_0 rimangono per il momento aperti, la chiusura di C_0 non provoca alcuna conseguenza.

Oltre a B_0, si disenergizza anche B_3, per cui commutano i contatti istantanei C_3: abbiamo due contatti che si aprono, con l'unica conseguenza dello spegnimento di L_2, ed un contatto che si chiude, senza alcuna conseguenza.

Non ci sono altre conseguenze, per cui la situazione finale è quella di tutte le bobine disenergizzate e delle due lampadine entrambe spente:



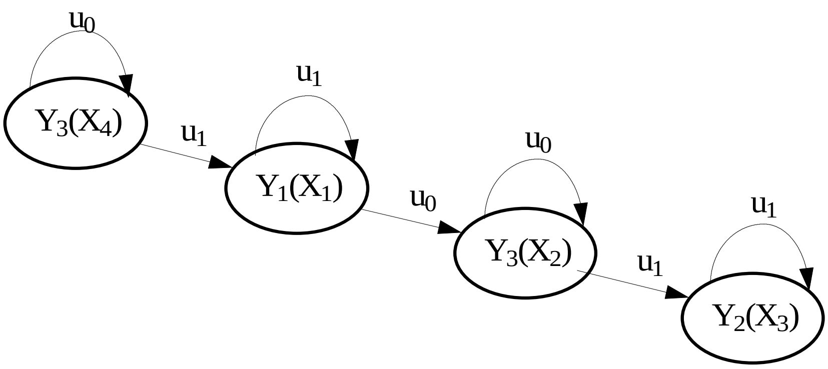
A ben guardare, questa è proprio la situazione di partenza X_4, per cui possiamo completare il grafo nel modo seguente:



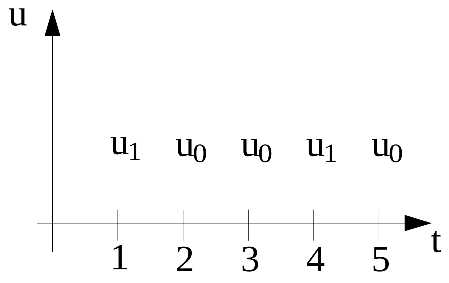
A questo punto, è ovvio che abbiamo considerato tutte le possibili evoluzioni del sistema. Ci siamo però concentrati essenzialmente sugli stati del sistema, ossia sulla energizzazione o meno delle bobine. Per quanto riguarda, invece, l'accensione delle lampadine, che è l'uscita del nostro sistema, abbiamo quanto segue: ricordando che abbiamo posto

$$y = \begin{cases} y_1 & \text{L}_1 \text{ accesa e L}_2 \text{ spenta} \\ y_2 & \text{L}_1 \text{ spenta e L}_2 \text{ accesa} \\ y_3 & \text{L}_1 \text{ spenta e L}_2 \text{ spenta} \\ y_4 & \text{L}_1 \text{ accesa e L}_2 \text{ accesa} \end{cases}$$

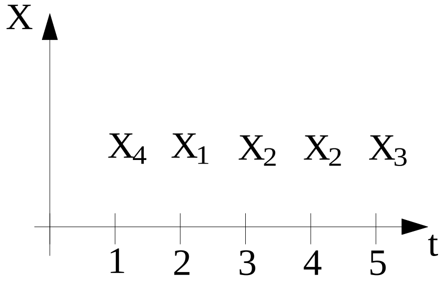
possiamo indicare i valori dell'uscita y direttamente nel grafo di prima accanto ai valori dello stato del sistema:



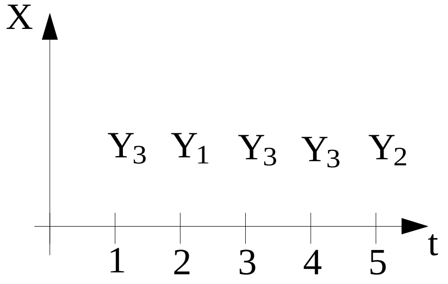
Questo grafo, che sintetizza tutte le conclusioni cui siamo arrivati nel discorso di prima, evidenzia bene il fatto che anche questo sistema, come gli altri 3 visti negli esempi precedenti, è di tipo "dinamico": infatti, in ciascun istante (discreto), l'uscita del sistema dipende sia dal valore dell'ingresso sia anche dallo stato iniziale in cui si trova il sistema. Per esempio, supponiamo di conoscere i valori assunti dall'ingresso in un certo intervallo di tempo:



Allora, se vogliamo conoscere il valore dell'uscita a partire dall'istante t=1, dobbiamo necessariamente conoscere lo stato del sistema all'istante t=1; supponiamo allora che il sistema parta dallo stato iniziale X_4; servendoci del grafo prima tracciato, possiamo determinare sia l'andamento degli stati



sia anche, ovviamente, i valori dell'uscita:



Ciò che è importante osservare, in questo esempio, è quanto segue:

- in primo luogo, fissato un certo istante τ, le informazioni che servono per determinare l'evoluzione dell'uscita a partire da questo istante sono lo stato in cui il sistema si trova all'istante τ considerato e i valori assunti dall'ingresso a partire da τ; non conta invece minimamente ciò che è successo al sistema negli istanti precedenti a τ;
- in secondo luogo, il legame tra l'ingresso e l'uscita è espresso, in forma implicita e non più esplicita come nei casi precedenti, dal grafo orientato trovato prima; non si tratta, dunque, di una relazione matematica, ma la funzione di legare i valori dell'uscita a quelli dell'ingresso è la stessa;
- ancora, sia l'ingresso sia l'uscita sia anche lo stato del sistema assumono solo un numero FINITO di valori discreti;
- infine, il concetto di tempo, che è comune a tutti e 4 gli esempi esaminati, prevede in questo caso, come in quello precedente della manodopera nello stabilimento, valori discreti (anche se teoricamente infiniti).

Queste sono dunque le caratteristiche essenziali del sistema preso in esame in questo esempio.

DEFINIZIONE GENERALE DI "SISTEMA"

Sulla base dei 4 esempi esaminati, possiamo ora dare una definizione altamente generale di un sistema: dobbiamo cioè preoccuparci di indicare quali parametri servono a caratterizzare, in modo completo e univoco, un dato sistema in esame.

Alla base di tutti e 4 gli esempi visti c'è sempre il concetto di "tempo"; di conseguenza, il primo "oggetto" che noi dobbiamo definire per caratterizzare il sistema in esame è l' "**insieme dei tempi**", indicato generalmente con **T**: come si nota dagli esempi, questo insieme può essere fatto di numeri reali (quando il tempo è una grandezza continua, come nel caso della rete elettrica e del sistema meccanico) oppure di numeri interi positivi (quando il tempo è una grandezza quantizzata, come nel caso della manodopera dello stabilimento e del circuito a relè). Inoltre, per tale insieme dei tempi, è necessario stabilire una "*relazione d'ordine*", in modo da poter stabilire sempre, dati due istanti (continui o discreti) diversi, quale venga prima e quale dopo.

Fatto questo, segue la già citata "orientazione" del problema, ossia l'individuazione degli ingressi e delle uscite. Cominciando dall'ingresso, è intanto necessario indicare quali valori può assumere l'ingresso: può trattarsi di valori numerici continui, se per esempio si tratta di una tensione o di una forza come nei primi due esempi, oppure di valori numerici discreti, come per esempio nel terzo esempio, oppure anche di valori simbolici (del genere ACCESO e SPENTO oppure ON e OFF), come nel quarto esempio. Questo "**insieme dei valori possibili per l'ingresso**" si indica con **U**.

L'insieme U non però l'unica informazione che ci serve per definire l'ingresso: infatti, una volta stabiliti quali valori possono essere assunti dall'ingresso, è necessario stabilire "come" essi possono essere assunti. Ad esempio, se l'ingresso è una tensione che può variare tra -10V e +10V, bisogna specificare se l'andamento di questa tensione è continuo oppure discontinuo: nel primo caso, le variazioni tra un valore e l'altro sono, appunto, continue, graduali, mentre, nel secondo caso, esse sono brusche. E' necessario dunque fissare l' "**insieme delle funzioni ammissibili per l'ingresso**", che si indica generalmente con **W** .

A questo punto, avendo noi a che fare con dei sistemi dinamici, nei quali cioè l'ingresso non è l'unica informazione necessaria per determinare l'uscita, vanno definite le variabili di stato del sistema e, in particolare, va definito l' "**insieme dei valori assumibili dallo stato**" del sistema. Questo insieme si indica generalmente con **X** e può essere di vari tipi: per esempio, nel caso della rete elettrica (1° esempio), si tratta dell'insieme dei numeri reali in quanto si tratta di tutti i possibili valori della tensione ai capi del condensatore; nel caso del sistema meccanico (2° esempio), prendendo come uscita la posizione della massa, l'insieme X è costituito da tutte le possibili coppie (velocità , posizione), per cui si tratta di R^2; nel caso dello stabilimento (3° esempio), essendo lo stato del sistema corrispondente al numero di operai dello stabilimento, X coincide con l'insieme dei numeri naturali positivi; infine, nel caso del circuito a relè (4° esempio), X corrisponde all'insieme $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, visto che questi 4 sono gli unici possibili stati per il sistema.

Adesso, le informazioni fornite sull'ingresso e sulle variabili di stato consentono di determinare l'uscita, per la quale valgono evidentemente le stesse considerazioni fatte per l'ingresso: è necessario specificare sia l' "**insieme dei valori possibili per l'uscita**", che si indica con **Y**, sia anche l' "**insieme delle funzioni ammissibili per l'uscita**", indicato con Γ.

Infine, l'ultima cosa da definire è il legame tra l'ingresso e l'uscita; anche questo è un aspetto delicato in quanto noi possiamo distinguere due diversi legami:

- in primo luogo, abbiamo una relazione, che può essere esplicita (ossia matematica, come nei primi 3 esempi) oppure implicita (per esempio un grafo orientato, come nel quarto esempio), la quale fornisce l'evolversi dello stato del sistema, noti che siano lo stato iniziale e l'andamento temporale dell'ingresso; a questa funzione diamo il nome di "**funzione di transizione di stato**" (simbolo **φ**)

- in secondo luogo, abbiamo una relazione che lega l’uscita del sistema, in un certo istante, allo stato in cui il sistema si trova in quello stesso istante: questa funzione prende il nome di “**funzione di uscita**” (simbolo η).

Questi sono dunque gli 8 oggetti che noi dobbiamo specificare in modo da caratterizzare in modo univoco e completo il sistema in esame:

$$\boxed{\langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \Omega, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \Gamma, j, h \rangle}$$

Lo scopo dei prossimi paragrafi è caratterizzare in modo dettagliato le funzione φ e η.

La funzione di transizione di stato

DEFINIZIONE

La definizione di questa funzione è stata già anticipata prima:

Def. *La relazione che fornisce l’evolversi dello stato del sistema, noti che siano l’istante iniziale, lo stato di partenza (o “stato iniziale”) e l’andamento dell’ingresso a partire dall’istante iniziale, prende il nome di “**funzione di transizione di stato**” e si indica generalmente con* j

Vogliamo studiare le caratteristiche di questa funzione.

In primo luogo, ci chiediamo quale sia l’insieme di definizione di questa funzione (cioè il suo dominio) e quale l’insieme dei valori che essa può assumere (cioè il suo co-dominio).

L’insieme dei valori assumibili dalla funzione di transizione di stato è ovviamente l’insieme X dei valori assumibili dallo stato del sistema: la definizione dice infatti che, a partire dalle informazioni opportune, la funzione φ fornisce l’evolversi dello stato del sistema, ossia fornisce lo stato finale del sistema.

D’altro canto, le “informazioni opportune” di cui necessita φ sono l’istante iniziale τ, lo stato del sistema $x(\tau)$ in tale istante iniziale, l’istante di osservazione t, ossia l’istante nel quale si vuol conoscere lo stato del sistema, ed infine l’andamento $u(\bullet)$ dell’ingresso.

N.B. Nel seguito, sarà usata la seguente simbologia: il simbolo $u(\bullet)$ rappresenta l’ingresso come funzione del tempo, mentre il simbolo $u(t)$ rappresenta il valore che tale ingresso assume nell’istante t; stesso discorso, ovviamente, per l’uscita $y(\bullet)$ e per lo stato $x(\bullet)$

Possiamo dunque affermare che la funzione di transizione di stato è fatta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \varphi\ :\ \mathrm{T}\times\mathrm{T}\times\mathrm{X}\times\Omega &\longrightarrow \mathrm{X} \\ (t,\tau,\bar{x},u(\bullet)) &\longrightarrow x(t)=\varphi(t,\tau,\bar{x},u(\bullet)) \end{aligned}$$

(dove ovviamente $\bar{x}=x(t)$ è lo stato del sistema all'istante iniziale τ).

Per chiarire meglio questa definizione, vediamo come è fatta la funzione di transizione di stato nei 4 esempi che abbiamo analizzato.

Esempio 1: rete elettrica

Cominciamo dalla rete elettrica: la variabile di stato, in questo esempio, è la tensione sul condensatore e la relazione (di tipo integrale) che abbiamo ricavato al fine di determinare tale tensione in un istante t qualsiasi è

$$\boxed{v_C(t)=e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-t)}v_C(t)+\int_t^t e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-x)}\frac{1}{(R_1+R_2)C}v_{IN}(x)dx}$$

Questa è la funzione di transizione di stato per il sistema considerato: infatti, noi calcoliamo $v_C(t)$, ossia lo stato nel sistema all'istante di osservazione t, a partire dal valore di τ e di t, a partire dallo stato nell'istante τ, rappresentato da $v_C(\tau)$, e a partire dall'andamento dell'ingresso, che è $V_{IN}(t)$, nell'intervallo (τ,t).

Esempio 2: sistema meccanico

Una relazione del tutto analoga si ha nel secondo esempio, quello del sistema meccanico: in questo caso, la variabile di stato è la velocità della massa e la si ricava tramite la relazione

$$\boxed{v(t)=e^{-\frac{B}{M}(t-t)}v(t)+\int_t^t e^{-\frac{B}{M}(t-x)}\frac{1}{M}f(x)dx}$$

che è evidentemente analoga a quella dell'esempio precedente.

Sempre in questo esempio, è anche possibile considerare come variabile di stato la posizione della massa, che si calcola mediante la relazione

$$z(t)=z(t)+v(t)\int_t^t e^{-\frac{B}{M}(q-t)}dq+\frac{1}{M}\int_t^t\int_t^q e^{-\frac{B}{M}(q-x)}f(x)dq\,dx$$

In questo caso, lo stato del sistema è rappresentato dalla coppia (v(t),z(t)), per cui la funzione di transizione di stato è data dall' "insieme" di questa relazione con quella che fornisce la velocità. Anche se si tratta di 2 distinte relazioni, vale lo stesso principio di fondo: lo stato del sistema all'istante t, rappresentato dai valori di v(t) e z(t), si ottiene a partire dai valori di t e di τ, a partire dallo stato del sistema all'istante τ, rappresentato dai valori di $v(\tau)$ e $z(\tau)$, ed a partire dall'andamento dell'ingresso nell'intervallo (τ,t).

Esempio 3: manodopera in uno stabilimento

Passiamo al terzo esempio, quello in cui l'uscita è costituita dal costo annuale della manodopera di uno stabilimento, mentre lo stato è dato dal numero di dipendenti dello stabilimento stesso: questo numero di dipendenti, per un generico anno t, si può calcolare mediante la relazione

$$x(t) = (1-b)x(t-1) + u(t-1)$$

Questa relazione, perché si possa conoscere il numero x(t) di dipendenti in un certo anno t, impone la conoscenza del numero di dipendenti nell'anno precedente, mentre a noi farebbe comodo una relazione in cui x(t) si possa calcolare con riferimento ad un qualsiasi anno precedente. E' possibile ricavare questa relazione in modo molto facile: infatti, se il numero di dipendenti all'anno t è dato da quella relazione, il numero di dipendenti all'anno t-1 sarà dato da

$$x(t-1) = (1-b)x(t-2) + u(t-2)$$

Sostituendo questa relazione in quella, otteniamo che

$$x(t) = (1-b)^2 x(t-2) + (1-b)u(t-2) + u(t-1)$$

In modo analogo, il numero di dipendenti all'anno t-2 sarà dato da

$$x(t-2) = (1-b)x(t-3) + u(t-3)$$

per cui, sostituendo ancora una volta, otteniamo che

$$x(t) = (1-b)^3 x(t-3) + (1-b)^2 u(t-3) + (1-b)u(t-2) + u(t-1)$$

Procedendo allora in modo ricorsivo, possiamo esprimere x(t) nel modo seguente:

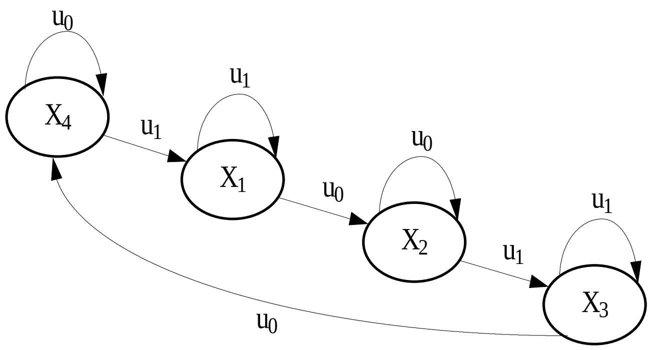
$$\boxed{x(t) = (1-\beta)^{t-\tau} x(\tau) + \sum_{k=\tau}^{t-1} (1-\beta)^{t-k-1} u(k)}$$

Questa è dunque la funzione di transizione di stato per questo sistema: essa fornisce infatti lo stato del sistema all'istante t a partire dai valori di t,τ e $x(\tau)$ (che è lo stato iniziale) e a partire dall'andamento dell'ingresso $u(\bullet)$ nell'intervallo di tempo (τ,t).

Esempio 4: circuito a relè

Questo 4° esempio si differenzia da quelli precedenti per una prima caratteristica fondamentale: infatti, gli stati possibili per questo sistema sono in numero finito (precisamente 4) e non corrispondono a valori numerici di qualche variabile, bensì corrispondono a valori logici che indicano quali bobine del circuito sono energizzate e quali no.

Oltre a questo, l'altra differenza fondamentale è proprio nella funzione di transizione di stato: mentre, nei casi precedenti, tale funzione era costituita sempre da una relazione matematica, ossia una relazione "esplicita", in questo caso è espressa, in forma "implicita", mediante un grafo orientato, che prende perciò il nome di "**grafo di transizione**".



Nonostante questo, il concetto di fondo della funzione di transizione di stato è (ovviamente) identico a quello dei casi precedenti: noto l'istante iniziale ed il relativo stato, noto lo stato finale e noto l'ingresso a partire dall'istante iniziale, il grafo fornisce, in modo univoco, lo stato finale (cioè nell'istante t) del sistema.

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI TRANSIZIONE DI STATO

In base a come è stata definita la funzione di transizione di stato, essa DEVE godere di 4 importanti proprietà che ci accingiamo ad elencare, preoccupandoci di verificare che esse valgano nei 4 esempi considerati fino ad ora.

Proprietà di consistenza

Dato un generico sistema, supponiamo di fissare un istante iniziale τ e supponiamo di conoscere lo stato $\overline{x} = x(t)$ del sistema in tale istante; supponiamo anche di conoscere l'andamento temporale dell'ingresso $u(\bullet)$ applicato al sistema. Allora, se fissiamo un certo istante finale t e conosciamo come è fatta la funzione di transizione di stato, abbiamo ormai capito che tale funzione, senza l'ausilio di informazioni aggiuntive, deve essere in grado, per definizione, di fornirci lo stato x(t) del sistema all'istante t. Una situazione particolare si ha evidentemente se t=τ, ossia se lo stato finale coincide con quello iniziale. La "**proprietà di consistenza**" afferma quanto segue:

$$\boxed{\text{fissato } t=\tau: \quad \varphi\left(t,\tau,\overline{x},u(\bullet)\right)=\overline{x} \quad \forall\tau\in T \quad \forall\overline{x}\in X \quad \forall u(\bullet)\in\Omega}$$

Si tratta di un risultato abbastanza scontato, ma comunque importante: *se l'istante finale coincide con quello iniziale, quale che esso sia, la funzione di transizione di stato fornisce uno stato finale coincidente con quello iniziale, a prescindere da quale sia questo stato iniziale e a prescindere anche dall'andamento dell'ingresso.*

Vediamo se questa proprietà è verificata nei 4 esempi.

Cominciamo dal caso della rete elettrica: la funzione di transizione di stato è

$$v_C(t) = e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-\tau)} v_C(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-\xi)} \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_{IN}(\xi)d\xi$$

ed è evidente che, ponendo t=τ, troviamo anche $v_C(t)=v_C(\tau)$.

Stesso discorso ovviamente per il sistema meccanico, dove la funzione di transizione di stato è formalmente analoga a questa.

Passiamo al terzo esempio, nel quale la funzione di transizione di stato è

$$x(t) = (1-\beta)^{t-\tau} x(\tau) + \sum_{k=\tau}^{t-1} (1-\beta)^{t-k-1} u(k)$$

Anche qui, se noi poniamo t=τ, otteniamo x(t)=x(τ).

Proprietà di irreversibilità

Dato sempre il nostro generico sistema, supponiamo di fissare ancora una volta l'istante iniziale τ, lo stato iniziale $\overline{x} = x(t)$ del sistema e l'andamento temporale dell'ingresso $u(\bullet)$ applicato al sistema. Allora, se fissiamo un certo istante finale t in modo che esso sia successivo a τ, la "**proprietà di irreversibilità**" dice che *la funzione di transizione di stato deve necessariamente essere in grado di fornirci lo stato x(t) del sistema all'istante t.*

In termini formali, questa proprietà si può enunciare nel modo seguente:

$$\boxed{\text{la funzione } \varphi(t,\tau,\overline{x},u(\bullet)) \text{ è definita } \quad \forall t \geq \tau \quad \forall \overline{x} \in X \quad \forall u(\bullet) \in \Omega}$$

Dobbiamo ora capire il motivo del termine "*irreversibilità*".

La prima cosa che osserviamo è la seguente: la proprietà dice che, fissando un qualsiasi istante finale t successivo all'istante iniziale τ, la funzione di transizione di stato deve sempre fornirci lo stato del sistema nell'istante t. Viene da chiedersi se valga anche il contrario, ossia se valga la cosiddetta proprietà di "**irreversibilità all'indietro**": ci si chiede, cioè, se, fissato l'istante τ, noto lo stato x(τ) del sistema nell'istante τ e noto l'andamento $u(\bullet)$ dell'ingresso, la funzione di transizione di stato è in grado di fornirci lo stato del sistema in un istante t precedente a τ.

E' facile verificare (e lo faremo tra un attimo mediante i soliti 4 esempi), che questo non sempre accade: in altre parole, diciamo che *la proprietà di irreversibilità vale SEMPRE in avanti, cioè per t³t, mentre non vale necessariamente all'indietro, ossia per t<t.*

Vediamo cosa accade nei 4 esempi finora trattati, cominciando dal primo.

La funzione di transizione di stato per la rete elettrica è

$$v_C(t) = e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-t)} v_C(t) + \int_{t}^{t} e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-x)} \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_{IN}(x)dx$$

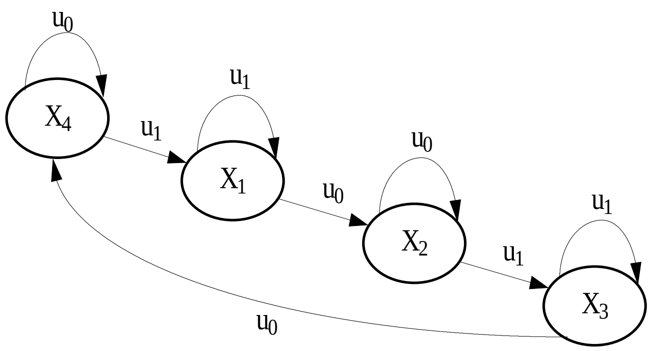
dove i due istanti t e τ sono tali che τ<t. Nessuno ci impedisce di esplicitare $v_C(\tau)$ anziché $v_C(t)$:

$$v_C(\tau) = \frac{1}{e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-\tau)}} v_C(t) - \frac{1}{e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-\tau)}} \int_\tau^t e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t-x)} \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_{IN}(x)dx$$

Questa relazione è perfettamente valida in quanto il termine esponenziale che si trova a denominatore non si annulla mai. Tale relazione ci dà, in modo univoco il valore dello stato del sistema all'istante τ, noti che siano, oltre a t e τ, lo stato del sistema all'istante t e l'andamento dell'ingresso nell'intervallo (t,τ). Dato che τ<t, è ovvio che <u>risulta verificata la proprietà di irreversibilità all'indietro</u>, in quanto la funzione di transizione di stato ci ha consentito, conoscendo le opportune informazioni, ci determinare lo stato dell'istante in un istante precedente rispetto all'istante iniziale.

E' ovvio che la stessa cosa accade anche nel sistema meccanico, visto che la funzione di transizione di stato è formalmente identica.

Vediamo invece che cosa accade nel 4° esempio, dove la funzione di transizione di stato è rappresentata dal grafo di transizione di stato:



Supponiamo ad esempio che, all'istante iniziale τ, il sistema si trovi nello stato X_1 e supponiamo anche che il valore dell'ingresso che ha portato a questo stato sia u_1. Possiamo risalire allo stato precedente ad X_1? Evidentemente no, in quanto l'ingresso u_1 porta il sistema in X_1 sia che lo stato precedente fosse X_4 sia che lo stato precedente fosse ancora X_1. Deduciamo, quindi, che il sistema non gode della proprietà di irreversibilità all'indietro.

Per tirare le somme, diamo le seguenti definizioni:

<u>Def.</u> *Un sistema per il quale valga solo la proprietà di irreversibilità in avanti si dirà **"sistema irreversibile"**; un sistema per il quale valga anche la proprietà di irreversibilità all'indietro, si dirà invece **"sistema reversibile"**.*

Proprietà di composizione

Dato sempre il nostro generico sistema, supponiamo di fissare tre istanti diversi e successivi $t_1<t_2<t_3$. Supponiamo anche di conoscere lo stato $\overline{x} = x(t_1)$ del sistema all'istante t_1 e l'andamento temporale dell'ingresso $u(\bullet)$ applicato al sistema. Per determinare lo stato del sistema all'istante t_3 ci basta usare la funzione di transizione di stato: avremo così che

$$x(t_3) = \varphi\left(t_3, t_1, \overline{x}, u(\bullet)\right)$$

Tuttavia, nell'intervallo di tempo (t_1,t_3) è compreso l'istante intermedio t_2, nel quale il sistema avrà un certo stato $x(t_2)$ calcolabile anch'esso tramite la funzione di transizione di stato:

$$x(t_2) = \varphi\left(t_2, t_1, \overline{x}, u(\bullet)\right)$$

La "**proprietà di composizione**" dice allora che

$$\boxed{x(t_3) = \varphi\left(t_3, t_1, \overline{x}, u(\bullet)\right) = x(t_2) + \varphi\left(t_3, t_2, x(t_2), u(\bullet)\right)}$$

ossia che *lo stato del sistema nell'istante finale t_3 può essere calcolato direttamente come "passaggio" dall'istante iniziale t_1 oppure "passando" per l'istante intermedio t_2, cioè sommando il "passaggio" da t_1 a t_2 e quello da t_2 a t_3.*

E' chiaro che questa proprietà vale per tutti e 4 i nostri esempi. A scopo di esercizio, la verifichiamo per il primo esempio.

Fissiamo l'istante t_1 e l'istante t_2; fissiamo lo stato $x(t_1)$ all'istante t_1 e fissiamo l'andamento $u(\bullet)$ dell'ingresso; usando la funzione di transizione di stato, abbiamo che lo stato del sistema all'istante t_3 è dato da

$$v_C(t_3) = e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t_3-t_1)} v_C(t_1) + \int_{t_1}^{t_3} e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}(t_3-\xi)} \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_{IN}(\xi)d\xi$$

Per comodità di scrittura, poniamo $a = \dfrac{1}{(R_1+R_2)C}$, per cui lo stato finale risulta essere

$$v_C(t_3) = e^{-\alpha(t_3-t_1)} v_C(t_1) + \int_{t_1}^{t_3} e^{-\alpha(t_3-\xi)} \alpha v_{IN}(\xi)d\xi$$

Ci chiediamo, allora, se il sistema perviene a questo stesso stato passando prima da t_1 a t_2 a poi da t_2 a t_3.

Nel passaggio dall'istante t_1 all'istante t_2, il sistema passa dallo stato iniziale $v_C(t_1)$ allo stato finale

$$v_C(t_2) = e^{-\alpha(t_2-t_1)} v_C(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\alpha(t_2-\xi)} \alpha v_{IN}(\xi)d\xi$$

Successivamente, nel passaggio dall'istante t_2 all'istante t_3, il sistema passa dallo stato iniziale $v_C(t_2)$ allo stato finale

$$v'_C(t_3) = e^{-\alpha(t_3-t_2)} v_C(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} e^{-\alpha(t_3-\xi)} \alpha v_{IN}(\xi)d\xi$$

Sostituendo a $v_C(t_2)$ l'espressione prima calcolata e facendo semplici passaggi, si verifica facilmente che $v'_C(t_3)=v_C(t_3)$, ossia che, come previsto, la funzione di transizione di stato gode della proprietà di composizione.

Proprietà di casualità

Sia dato sempre il nostro generico sistema; supponiamo di fissare un istante iniziale τ, con il corrispondente stato $\overline{\mathrm{x}} = \mathrm{x}(t)$, e un istante finale t; supponiamo inoltre che ci siano due possibili andamenti $\mathrm{u}_1(\bullet)$ e $\mathrm{u}_2(\bullet)$ della funzione di ingresso applicate al sistema: in particolare, supponiamo che queste due funzioni siano identiche nell'intervallo semiaperto $[t,\mathrm{t}[$, mentre non lo siano necessariamente al di fuori di questo intervallo. Sotto queste ipotesi, la "**proprietà di casualità**" dice che

$$\boxed{j\left(t,\mathrm{t},\overline{\mathrm{x}},\mathrm{u}_1(\bullet)\right) = \mathrm{x}(\mathrm{t}) = j\left(t,\mathrm{t},\overline{\mathrm{x}},\mathrm{u}_2(\bullet)\right) \quad \forall \mathrm{t},t \in \mathrm{T} \quad \forall \overline{\mathrm{x}} \in \mathrm{X}}$$

In altre parole, questa proprietà afferma che *ciò che interessa della funzione di ingresso* $\mathrm{u}(\bullet)$*, ai fini della valutazione dello stato finale del sistema, è la* <u>*restrizione*</u> *di tale funzione all'intervallo* $[t,\mathrm{t}[$*, mentre non interessa affatto l'andamento della funzione al di fuori di questo intervallo.*

Ciò serve soprattutto a dire due cose:

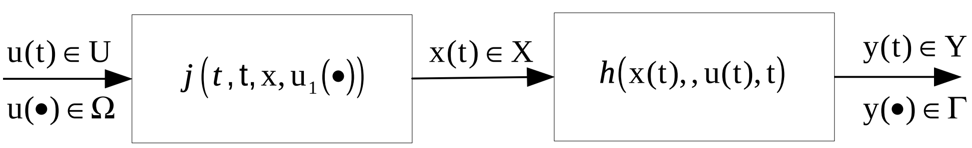
- in primo luogo, l'andamento dell'ingresso negli <u>istanti successivi a t</u> non ha alcun effetto sullo stato del sistema all'istante t; in altre parole, non è possibile trovare uno stato il cui valore dipende da una causa che si verifica in un istante successivo a quello in cui tale stato viene raggiunto; si dice che il sistema è "<u>*non anticipativo*</u>" o appunto "**causale**";
- in secondo luogo, la stessa considerazione vale per quanto riguarda gli <u>istanti precedenti all'istante iniziale τ</u>: l'evoluzione dello stato del sistema negli istanti precedenti a τ può essere qualsiasi, mentre, ciò che conta per stabilire lo stato all'istante t, è lo stato all'istante τ; è questo stato x(τ) a riassumere in sé, da solo, l'evoluzione precedente del sistema.

La funzione di uscita

DEFINIZIONE

Abbiamo in precedenza detto che, oltre alla funzione di transizione di stato, che fornisce l'evoluzione temporale dello stato del sistema, c'è un'altra relazione importante da considerare: si tratta della cosiddetta "**funzione di uscita**", la quale fornisce il valore dell'uscita, nell'istante fissato t, in funzione dello stato del sistema all'istante t, del valore dell'ingresso al sistema nell'istante t e, eventualmente, dell'istante t stesso. La differenza fondamentale con la funzione di transizione di stato è dunque che *mentre j è una relazione integrale, la funzione di uscita, generalmente indicata con* ***h****, è una* <u>*relazione algebrica.*</u>

Per chiarire bene questo concetto, possiamo schematizzare il generico sistema in esame nel modo seguente:



Abbiamo dunque in ingresso al sistema una funzione di ingresso $u(\bullet)$, scelta tra quelle contenute nell'insieme Ω e con valori appartenenti all'insieme U; a partire dalla conoscenza dell'ingresso e dello stato del sistema all'istante iniziale τ, la funzione di transizione di stato fornisce lo stato del sistema all'istante finale t; a partire da questo stato, a partire dal valore dell'ingresso all'istante finale t e a partire dall'istante finale stesso, la funzione di uscita ci fornisce appunto l'uscita y(t).

Vediamo adesso come è fatta la funzione di uscita nei soliti 4 esempi.

Nel caso della rete elettrica si tratta della relazione

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{IN}(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_C(t)$$

Essa, in accordo alla definizione data prima, fornisce il valore dell'uscita all'istante t in funzione dello stato all'istante t, rappresentato da $v_C(t)$, e dell'ingresso all'istante t, rappresentato da $v_{IN}(t)$. Non c'è invece dipendenza dall'istante t.

Nel caso del sistema meccanico, invece, il fatto che la variabile di stato v(t) coincida con l'uscita v(t) del sistema, è chiaro che la relazione è semplicemente

$$v(t) = v(t)$$

Nel terzo esempio, quello della manodopera nello stabilimento, la funzione di uscita è

$$y(t) = C(t)x(t)$$

Infine, nel caso del circuito a relè, la relazione non è in forma esplicita, cioè in forma matematica, ma può essere ad esempio espressa mediante la seguente tabella:

stato	**uscita**
X_4	Y_3
X_1	Y_1
X_2	Y_3
X_3	Y_2

Anche se non abbiamo una relazione matematica, è chiaro che il principio di fondo è lo stesso: noto lo stato in un certo istante, quella tabella fornisce il valore dell'uscita in quello stesso istante.

Sistemi propri e sistemi impropri

Proprio dall'esame dei 4 esempi si può notare che la funzione di uscita può presentare caratteristiche differenti da caso a caso. In particolare, ciò che ci interessa è vedere quando questa funzione sia legata al valore istantaneo dell'ingresso e quando invece no.

Consideriamo ad esempio l'esempio della rete elettrica: in questo caso, la funzione di uscita è

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{IN}(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_C(t)$$

e quindi essa presenta una dipendenza (istantanea) dall'ingresso. Allora, un sistema per il quale sussiste questa dipendenza si definisce "**sistema (dinamico) improprio**".

Nel caso del sistema meccanico, invece, la funzione di uscita corrisponde alla identità $v(t) = v(t)$, in quanto la variabile di uscita coincide con la variabile di stato. Si nota che la funzione di uscita non dipende dall'ingresso, ossia che il valore istantaneo dell'uscita non dipende dal corrispondente valore istantaneo dell'ingresso: in questo caso, parliamo allora di "**sistema (dinamico) proprio**".

E' chiaramente un sistema proprio anche quello relativo al terzo esempio, nel quale la funzione di uscita è

$$y(t) = C(t)x(t)$$

E' anche proprio il 4° sistema, quello cioè in cui la funzione di uscita è definita implicitamente dalla tabella

stato	**uscita**
X_4	Y_3
X_1	Y_1
X_2	Y_3
X_3	Y_2

Infatti, in questo caso, noto lo stato del sistema in un determinato istante, è subito individuata l'uscita del sistema in tale istante, senza che sia necessaria alcuna informazione circa il valore dell'ingresso nello stesso istante.

Possiamo dunque dire che

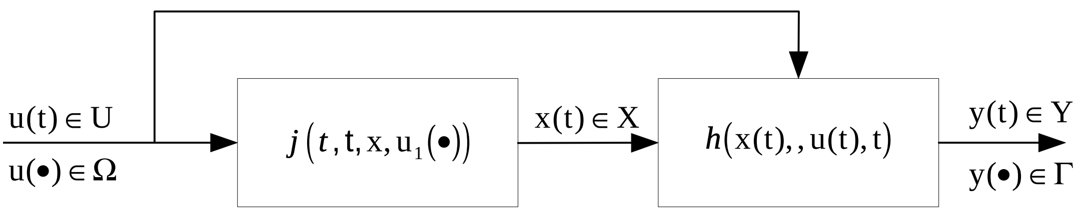
Def. *Un sistema (dinamico)* ***proprio*** *è tale che non ci sia dipendenza istantanea dell'uscita dall'ingresso. In caso sussista questa dipendenza, il sistema è* ***improprio***

E' comunque importante notare la differenza tra un sistema (dinamico) improprio ed un sistema statico: in un sistema statico, in base alla definizione data in precedenza, sussiste SOLO la dipendenza istantanea tra ingresso ed uscita (come nel caso della corrente i=Gv che fluisce in un resistore a seguito della applicazione di una tensione v), mentre invece, in un sistema (dinamico) improprio, sussiste sia la dipendenza istantanea tra uscita ed ingresso sia anche la dipendenza istantanea tra uscita e stato.

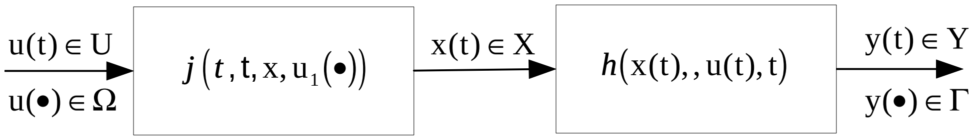
La nostra analisi sarà concentrata essenzialmente sui sistemi dinamici propri.

Per avere ancora più chiara la differenza tra un sistema (dinamico) proprio e uno improprio, possiamo far uso di uno schema a blocchi:

- lo schema a blocchi di un sistema (dinamico) improprio è del tipo seguente:



- lo schema a blocchi di un sistema (dinamico) proprio è invece del tipo seguente:



La differenza è evidentemente nel fatto che il valore istantaneo u(t) dell'ingresso nel primo caso influenza il valore istantaneo y(t) dell'uscita, mentre nel secondo caso influenza solo il valore istantaneo x(t) dello stato (il quale a sua volta influisce sul valore istantaneo dell'uscita).

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1